NOM :…………………………………….. *Mars 2019*

Prénom : ………………………………… *Recrutement TP*

FORMATION INGENIEUR EN PARTENARIAT AVEC AFTP-PACA
SPECIALITE TRAVAUX PUBLICS

<u>Session 30 mars 2019</u>

MATHÉMATIQUES

Temps conseillé : 1 heure 30

Aucun document autorisé, calculatrices interdites.

<u>Remarque préliminaire</u> : Cette épreuve a pour but d’évaluer le niveau de connaissances de chacun des candidats en fonction des programmes des formations dont ils sont issus.

<u>Il n’est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale</u>.

<u>Conseil important</u> : Les questions sont pour la plupart rédigées de façon à comporter des réponses de niveaux de difficulté croissants. Des réponses partielles correctes sont facilement accessibles dans chaque question et peuvent contribuer à améliorer sensiblement la note finale.

Pour chacune des neuf questions il est demandé une ou des réponses précises et concises, à inscrire dans les cadres prévus à cet effet.

Question 1 Soit $f(x) = \sin x - x \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) =$

L'ensemble des x de R tels que $f'(x) = 0$ est

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, f'(x) = 0 \right\} = \left\{ \qquad \right\}$$

Soit $k \in \mathbb{N}$.

(Cocher les bonnes cases)

Sur $\left[2k\pi \,, (2k+1)\pi\right[$	
$f' \geq 0$	☐
$f' \leq 0$	☐
f' change de signe	☐

Sur $\left[(2k+1)\pi \,, (2k+2)\pi\right[$	
$f' \geq 0$	☐
$f' \leq 0$	☐
f' change de signe	☐

Pour $k \in \mathbb{Z}$ on a

$f(2k\pi) =$

$f\left((2k+1)\pi\right) =$

$f(2k\pi) \cdot f\left((2k+1)\pi\right) =$

(Cocher les bonnes cases)
Pour $k \in \mathbb{N}^*$ (extrema relatifs de f)

$f(2k\pi)$ est un	maximum ☐
	minimum ☐

$f\left((2k+1)\pi\right)$ est un	maximum ☐
	minimum ☐

f est paire ☐ f est impaire ☐ f n'est ni paire , ni impaire ☐

Soit $k \in \mathbb{N}$.

Sur $\left[2k\pi \,, (2k+1)\pi\right]$ f est	
strictement croissante	☐
strictement décroissante	☐
non monotone	☐

Sur $\left[(2k+1)\pi \,, (2k+2)\pi\right]$ f est	
strictement croissante	☐
strictement décroissante	☐
non monotone	☐

Sur $\left[k\pi \,, (k+1)\pi\right]$ l'équation $f(x) = 0$ admet

aucune solution	☐	une seule solution	☐
au moins deux solutions	☐	cela dépend de k	☐

Question 2 Dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation $z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$

admet pour solutions

$z_1 =$
$z_2 =$

.

Dans la forme polaire $\rho \cdot e^{i\theta}$ de z_1 et de z_2 on a

$\rho_1 =$	$\theta_1 =$
$\rho_2 =$	$\theta_2 =$

Dans la forme polaire $\rho_{1\times 2} \cdot e^{i\theta_{1\times 2}}$ de $z_1 \cdot z_2$ on a

$\rho_{1\times 2} =$	$\theta_{1\times 2} =$

On en déduit la relation (à compléter)

$\operatorname{Arc}\tan 2 - \operatorname{Arc}\tan\left(\frac{1}{3}\right) =$

Question 3 Soient $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $g(x) = \tan x$, $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La primitive G de g sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 est

$G(x) =$

La primitive F de f sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en 0 est (intégrer f par parties)

$F(x) =$

.

Question 4 On considère l'équation différentielle $y'' - 6y' + 13y = f(x)$.

Pour $f(x) = 0$

- la solution générale est

  $y(x) =$

- la solution telle que $y(0) = -1$ et $y'(0) = 1$ est

  $y(x) =$

Pour $f(x) = 26x^2 + 15x - 1$

- la fonction $y(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation si on choisit

$a =$	$b =$	$c =$

- la solution de l'équation telle que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 4$ est

$y(x) =$

Question 5

On considère l'équation différentielle $\cos^3 x \cdot y'(x) - 2\sin x \cdot y(x) = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- la solution générale est

$y(x) =$

- la solution de l'équation telle que $y(0) = 1$ est

$y(x) =$

Question 6

On considère l'équation différentielle $3y' \cdot \cos^2 x - \frac{\sin x}{y^2} = 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

La solution de cette équation telle que $y(0) = 1$ est

$y(x) =$

Question 7

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = (x-3)^2(y-3) + 2(y-4)^2$.

Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) =$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$

Les solutions du système $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{pmatrix}$ sont

$(x_1, y_1) = \Big(\quad , \quad \Big)$
$(x_2, y_2) = \Big(\quad , \quad \Big)$
$(x_3, y_3) = \Big(\quad , \quad \Big)$

Calculer

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) =$	$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) =$	

Préciser la valeur des coordonnées et indiquer la nature (maximum, minimum, col ou point selle) des points stationnaires (ou critiques) de f.

$M_1 \ (x_1, y_1) = (\quad , \quad)$	Maximum □	Minimum □	Col □
$M_2 \ (x_2, y_2) = (\quad , \quad)$	Maximum □	Minimum □	Col □
$M_3 \ (x_3, y_3) = (\quad , \quad)$	Maximum □	Minimum □	Col □

Question 8

On veut que les coordonnées de $\overrightarrow{OA} = -3\vec{i} + y_A \vec{j} + z_A \vec{k}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B \vec{i} + y_B \vec{j} - 3\vec{k}$

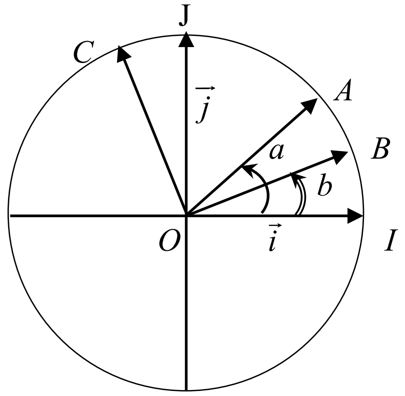
vérifient dans $\mathbb{R}^3$ le système linéaire $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Les bonnes valeurs pour $\begin{pmatrix} y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{-3} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{-3} \end{pmatrix}$.

Soit (D) la droite portée par $\overrightarrow{AB}$ et soient $\left| \begin{array}{l} (P) \text{ le plan d'équation } 5x+2y-3z = 0 \\ (P') \text{ le plan d'équation } x - y + z = 0 \end{array} \right.$.

(P) est orthogonal à (D)	☐	(P') est orthogonal à (D)	☐
(P) est parallèle à (D)	☐	(P') est parallèle à (D)	☐
ni l'un ni l'autre	☐	ni l'un ni l'autre	☐

Question 9 Dans le plan $\mathbb{R}^2$ rapporté à la base canonique $\{\vec{i}\,,\,\vec{j}\}$ on considère la situation telle que décrite sur la figure ci-dessous.



Les vecteurs $\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}\,,\overrightarrow{OC}$ sont de longueur égale à 1, a est l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OA}\right)$, b est l'angle $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OB}\right)$, et l'angle $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ est droit.

Dans les décompositions suivantes $\begin{cases} (1) \quad \overrightarrow{OA} = x_A\,\vec{i} + y_A\,\vec{j} = x'_A\,\overrightarrow{OB} + y'_A\,\overrightarrow{OC} \\ (2) \quad \overrightarrow{OB} = x_B\,\vec{i} + y_B\,\vec{j} \quad , \quad \overrightarrow{OC} = x_C\,\vec{i} + y_C\,\vec{j} \end{cases}$ on a

$\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_C \\ y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$

Le remplacement dans (1) de $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ par leur expression dans (2) permet d'écrire $\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$ comme solution d'un système linéaire de la forme $P \cdot \begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ où P est une matrice 2×2.

Préciser les coefficients $P = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$ $\quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{pmatrix}$.

La solution $\begin{pmatrix} x'_A \\ y'_A \end{pmatrix}$ du système ci-dessus est

$x'_A =$

$y'_A =$

.

Application : les angles a et b étant bien choisis, calculer

$\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) =$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) =$